7/10/2020

Προαπαιτούμενα: Τοπολογία, ΑΠΙ, ΑΠΙΙ

Βιβλιογραφία: · Rudin,

· Aliprantis, Burkinshaw, Principles of real analysis

· Αναστασης, Τσολομύτης, Φελουζής Πραγματική ανάλυση

αυτό θα ακολουθήσει

- Θα δίνει φυλλάδια (προαιρετικά) αν θέλουμε του τα στέλνουμε.

Βασικές έννοιες θεωρίας συνόλων

Ορισμός: Έστω $X, I \neq \emptyset$ δύο σύνολα. Μία οικογένεια $\{x_i\}_{i\in I}$ από το X με σύνολο δεικτών το I είναι μία απεικόνιση $f: I \to X$, όπου $x_i := f(i)$.

Ειδικότερα, αν $I = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (χωρίς το 0) τότε η οικογένεια $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (ή $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ή $\{x_n\}$) ονομάζεται ακολουθία από το X

• Αν $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ είναι μία ακολουθία φυσικών αριθμών (γνησίως αύξουσα), τότε η οικογένεια $\{x_{k_n}\}$ ονομάζεται υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας $\{x_n\}$

• Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_j\}_{j\in J}$ δύο οικογένειες συνόλων (δηλ. X_i, Y_j είναι σύνολα, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$). Ορίζουμε:

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x : \exists i \in I, \text{ τ.ω. } x \in X_i\} \quad (\text{ένωση})$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x : x \in X_i, \forall i \in I\} \quad (\text{τομή})$$

• Αν $X_i, Y_j \subseteq \Omega$ (Ω σύνολο αναφοράς)

, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$, ορίζουμε $X_i^c := \Omega \setminus X_i = \{x \in \Omega :$
$x \notin X_i\}$ (συμπλήρωμα)

Τύποι : • $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (X_i \cap Y_j)$

$= \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (X_i \cap Y_j) = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} (X_i \cap Y_j)$

• $\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (X_i \cup Y_j)$

• $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} (X_i^c)$, $\left(\bigcap_{i \in I} X_i^c\right)^c = \bigcup_{i \in I} (X_i^c)$

• Αν $A, B \subseteq \Omega$, τότε : $A \setminus B = A \cap B^c$

Εικόνα - αντίστροφη εικόνα

Έστω $f : \underset{\neq \emptyset}{X} \to \underset{\neq \emptyset}{Y}$ κ' $A \neq \emptyset$, $A \subseteq X$,
$\underset{\neq \emptyset}{B} \subseteq Y$

• Εικόνα του A μέσω της f: $f(A) =$
$\{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$
• Αντίστροφη εικόνα του B, μέσω της
f: $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

Σχέσεις : Έστω $\{X_i\}_{i \in I}$, $\{Y_j\}_{j \in J}$

οικογένειες υποσυνόλων του X κ' από το

Y αντίστοιχα.

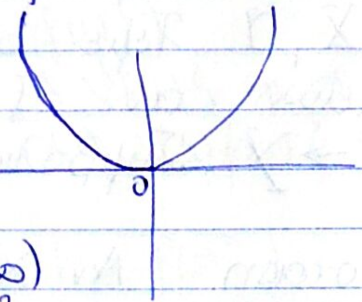
- $f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i)$, αν η f είναι 1-1, ισχύει η ισότητα.

Π.χ. $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ $(X=Y=\mathbb{R})$

$X_1=(-\infty,0]$, $X_2=[0,+\infty)$.

$f(X_1\cap X_2)=f(\{0\})=\{f(0)\}=\{0\}$

$f(X_1)=[0,\infty)=f(X_2) \Rightarrow$



$f(X_1)\cap f(X_2)=[0,\infty) \supsetneq \{0\} = f(X_1\cap X_2)$

- $f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(X_i)$

- $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

- $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$

Έστω $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$

- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, με ισότητα αν f επί

- $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$, με ισότητα αν f 1-1

Παραδείγματα: 1) $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ $(X=Y=\mathbb{R})$

$B=\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)=\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})=[0,+\infty) \subsetneq \mathbb{R} = B$

Άρα $f(\mathbb{R}) = f(f^{-1}(B))$

2) $f(x)=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $A=\{0\}$,
$f(A)=\{0\}$
$f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R} \supsetneq \{0\} = A$.

<u>Αριθμήσιμα κ' υπεραριθμήσιμα σύνολα</u>
Έστω δύο σύνολα X, Y (μη κενά).
Τα X, Y λέμε ότι έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων αν $\exists$ 1-1 κ' επί απεικόνιση $f: X \to Y$. Συμβολισμός $X \cong Y$

<u>Πρόταση</u>. Αν $X \cong Y$ κ' $Y \cong Z$ τότε:
i) $X \cong X$ (ανακλαστική)
ii) $Y \cong X$ (συμμετρική)
iii) $X \cong Z$ (μεταβατική)
Άρα, η "σχέση" $\cong$ είναι "σχέση ισοδυναμίας".
<u>Απόδ.</u>: Άσκηση.
<u>Ορολογία</u>:

- A αριθμήσιμο, αν $A \cong \mathbb{N}$
- A πεπερασμένο, αν $\exists n \in \mathbb{N}$, τ.ω. $A \cong \{1, 2, \ldots, n\}$
- A άπειρο, αν δεν είναι πεπερασμένο
- A το πολύ αριθμήσιμο, αν είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμο.
- A υπεραριθμήσιμο, αν είναι άπειρο και δεν είναι αριθμήσιμο.

• Αξίωμα της καλής διάταξης: Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Πρόταση 1: Έστω A ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε, το A είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Ορίζουμε επαγωγικά την εξής απεικόνιση $f: \mathbb{N} \to A$:

$f(1) = \min A$

$f(2) = \min(A \setminus \{f(1)\})$

• Τότε το $A \setminus \{f(1)\} \neq \emptyset$

• Τότε το $A \setminus \{f(1), f(2)\} \neq \emptyset$

$f(3) = \min(A \setminus \{f(1), f(2)\})$

• Τότε το $A \setminus \{f(1), f(2), f(3)\} \neq \emptyset$

⋮

$f(n) = \min(A \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\})$

⋮

Αρκεί νδο η f είναι 1-1 και επί

• $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots < f(n) < \ldots$

άρα f 1-1

• f επί: Έστω $n \in A$. Θέτουμε

$k = \#\{m \in A : m < n\}$

Τότε, $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(k) < n$

Θδο: $f(k+1) = n$

• Αν $f(k+1) < n \Rightarrow f(k+1) \in \{m \in A : m < n\}$

$f(1), \ldots, f(k) \in \{m \in A : m < n\} \Rightarrow$ $f(1), f(2), \ldots, f(k), f(k+1) \in \{m \in A : m < n\}$

$\Rightarrow \underbrace{\#\{m \in A : m < n\}}_{= k} \geq k+1$, άτοπο.

$$\Longrightarrow \boxed{n \leq f(k+1)}$$

• $f(k+1) = \min\left(A \setminus \{f(1), \dots, f(k)\}\right)$

Επειδή $n > f(k) > f(k+1) > \dots > f(1)$

$\Longrightarrow n \geq f(k+1) \Longrightarrow n = f(k+1)$

$\Longrightarrow f$ επί. ☒

Πόρισμα 1: Αν A αριθμήσιμο σύνολο και B άπειρο υποσύνολο του A, τότε το B είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: $\exists\, f: A \to \mathbb{N}$ 1-1 και επί. Η απεικ. $\bar{f}: B \to f(B)$, με τύπο $\bar{f}(x) = f(x), \forall x \in B$ είναι 1-1 και επί

$\Longrightarrow f(B) \cong B \Longrightarrow f(B)$ άπειρο

$\xRightarrow[\text{Προτ. 1}]{f(B) \subseteq \mathbb{N}} f(B)$ αριθμήσιμο $\Longrightarrow B$ αριθμήσιμο. ☒

Πόρισμα 2: Έστω A ένα αριθμήσιμο σύνολο κ' $B \subseteq A$. Τότε, το B είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Πρόταση 2: Το σύνολο A είναι το πολύ αριθμήσιμο αν-ν $\exists\, f: A \to \mathbb{N}$, 1-1.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ A το πολύ αριθμήσιμο

• Αν το A είναι άπειρο $\Longrightarrow A$ αριθμήσιμο $\Longrightarrow \exists f: A \to \mathbb{N}$, 1-1 (κ' επί)

• Αν το A είναι πεπερασμένο $\Longrightarrow$ $\exists\, f: A \to \{1, 2, \dots, n\}$ (για κάποιο $n \in \mathbb{N}$) 1-1 (κ' επί). Ορίζουμε $\bar{f}: A \to \mathbb{N}$, με τύπο $\overline{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. Τότε, η $\overline{f}$ είναι 1-1

($\Leftarrow$) $\exists f: A \to \mathbb{N}$, 1-1

Ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{f}: A \to f(A)$ με τύπο $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$

• Η $\tilde{f}$ είναι 1-1 κ' επί $\Rightarrow A \cong f(A)$

$\xrightarrow[\text{Πόρισμ. 2}]{f(A) \subseteq \mathbb{N}}$ $f(A)$ το πολύ αριθμήσιμο.

$\Rightarrow$ A " " " . ▨

<u>Πρόταση 3</u>: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (x,y) : \begin{matrix} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{matrix} \}$ αριθμήσιμο

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\exists!\, m, k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n = 2^{k-1}(2m-1)$

Πράγματι, έστω $k \in \mathbb{N}$ ο μεγαλύτερος φυσικός τ.ω. 2^{k-1} διαιρεί τον n.

Τότε, $n/2^{k-1} \in \mathbb{N}$ κ' $n/2^{k-1}$ περιττός (αλλιώς 2 θα διαιρούσε τον $n/2^{k-1}$, δηλ. $n/2^k \in \mathbb{N}$, άτοπο)

Άρα, $\exists!\, m \in \mathbb{N}$, τ.ω. $n/2^{k-1} = 2m-1$.

• Ορίζουμε την απεικόνιση $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με τύπο $f(k,m) = 2^{k-1} \cdot (2m-1)$.

Η f είναι 1-1 και επί, άρα $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$. ▨